1° ARGOMENTO: CURVE PIANE

Il concetto fondamentale di tutta l'Analisi Matematica è il concetto di FUNZIONE. Una funzione è una legge tra due insiemi che assegna ad ogni elemento del primo insieme (DOMINIO) uno ed un solo elemento del secondo insieme (CODOMINIO). Il primo corso di Analisi Matematica si occupa dello studio delle funzioni $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funzioni reali di una variabile reale.

È però possibile considerare funzioni definite e/o a valori in altri spazi diversi dalla retta reale $\mathbb{R}$, come ad esempio il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$.

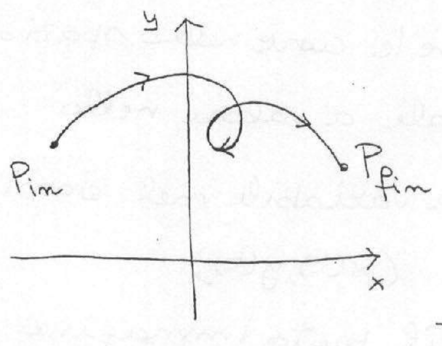
Le curve piane sono delle funzioni di una variabile reale a valori nel piano $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mentre le curve nello spazio sono delle funzioni di una variabile reale a valori nello spazio $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Solitamente la variabile nel dominio viene indicata con t mentre con $(x(t), y(t))$ (o $(x(t), y(t), z(t))$) viene rappresentato il punto immagine in $\mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$).

Si può interpretare t come il tempo e pensare ad una curva piana come alla legge del moto di una particella puntiforme la cui posizione all'istante t sia $(x(t), y(t))$ per ogni $t \in I$. Analogamente una curva nello spazio può essere interpretata come la legge del moto di una particella puntiforme la cui posizione all'istante t sia $(x(t), y(t), z(t))$ per ogni $t \in I$. L'utilizzo più frequente delle curve è infatti quello di descrivere linee nel piano e nello spazio.

Tratteremo inizialmente solo le curve piane; le curve nello spazio sono svolte nella seconda parte del corso.

<u>Definizione</u> (CURVA PIANA) Si dice CURVA (PIANA) una funzione CONTINUA $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dove I è un INTERVALLO di $\mathbb{R}$ e $\gamma(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t))$

Le equazioni $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$ sono dette EQUAZIONI PARAMETRICHE della curva (forniscono le variabili x e y in funzione del parametro t)



$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

punto iniziale $= P_{in} = \gamma(a) = (x(a), y(a))$

punto finale $= P_{fin} = \gamma(b) = (x(b), y(b))$

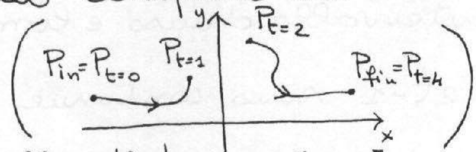
$\longrightarrow$ indica il verso di percorrenza

OSSERVAZIONE. Nella definizione di curva piana la prima ipotesi essenziale è che I sia un intervallo di $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo

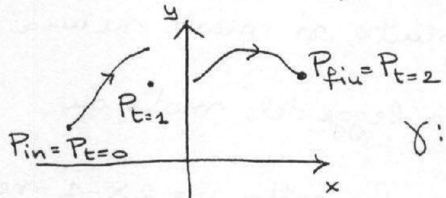
$$\Updownarrow$$

$\forall x, y \in I$ con $x < y$ $\quad \{z \in \mathbb{R} : x < z < y\} \subset I$, e che esistono gli intervalli aperti ($]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$), gli intervalli chiusi ($[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$), e quelli semiaperti ($]a,b]$, $[a,b[$).

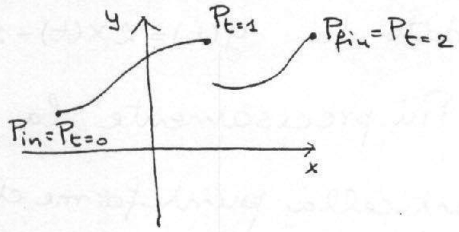
L'ipotesi che I sia un intervallo comporta che una funzione del tipo $\gamma: [0,1] \cup [2,4] \to \mathbb{R}^2$ (

) non sia una curva perchè nell'intervallo di tempo $]1,2[$ non sappiamo quale percorso compie il punto (che è come scomparso per riapparire solo per $t=2$ in $P_{t=2}$). Abbiamo invece due curve distinte se consideriamo $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma: [2,4] \to \mathbb{R}^2$.

La seconda ipotesi essenziale è che γ sia continua: questo significa che chiediamo che la particella puntiforme si muova con continuità nel piano e che non accettiamo situazioni tipo



$\gamma: [0,2] \to \mathbb{R}^2$



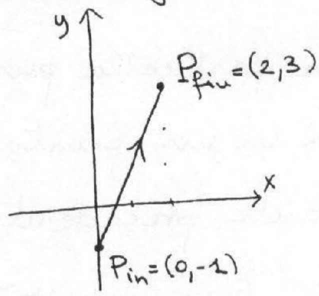
in cui la particella puntiforme ad un dato istante di tempo si sposta in un punto "lontano" da quello in cui si trovava all'istante precedente.

L'ipotesi di continuità di γ si traduce nella continuità delle due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ in quanto per avere la continuità del moto del punto devono variare con continuità sia l'ascissa sia l'ordinata del punto.

ESEMPI. •1 Si consideri la funzione $\gamma: [0,2] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, 2t-1)$; γ definisce una curva? di che curva si tratta?

$I = [0,2]$ è un intervallo chiuso e limitato, le due funzioni $x(t) = t$ e $y(t) = 2t-1$ sono continue (su tutto $\mathbb{R}$), quindi γ definisce una curva di punto iniziale $P_{in} = \gamma(0) = (0,-1)$ e punto finale $P_{fin} = \gamma(2) = (2,3)$. Le equazioni parametriche della curva sono date da $\begin{cases} x = t \\ y = 2t-1 \end{cases}$ $t \in [0,2]$.

Per stabilire il percorso che compie il punto notiamo che $t = x$ e sostituendo nella seconda equazione si ottiene $y = 2x-1$: allora per ogni $t \in [0,2]$ il legame tra $x(t)$ e $y(t)$ è dato da $y(t) = 2x(t) - 1$ cioè il punto si muove su una retta. Più precisamente la curva γ è la legge del moto di una particella puntiforme che percorre la retta $y = 2x-1$ nel verso delle x crescenti da $(0,-1)$ a $(2,3)$.



•2 $\gamma: [1,3] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t-1, 2t-3)$

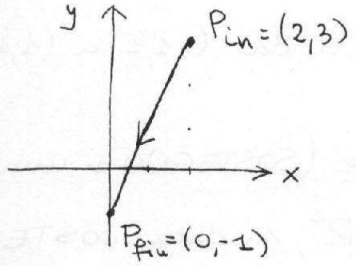
eq.^{ni} parametriche $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-3 \end{cases}$ $t \in [1,3]$

$P_{in} = \gamma(1) = (0,-1)$ $P_{fin} = \gamma(3) = (2,3)$

$t = x+1 \Rightarrow y = 2(x+1) - 3 \Rightarrow y = 2x-1$

Di nuovo la particella puntiforme percorre la retta $y = 2x-1$ nel verso delle x crescenti da $(0,-1)$ a $(2,3)$. Le due curve (•1 e •2) differiscono però nell'intervallo di tempo su cui sono definite ($[0,2]$ in •1 e $[1,3]$ in •2).

• 3 $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2-2t, 3-4t)$ $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3-4t \end{cases}$ $t \in [0,1]$

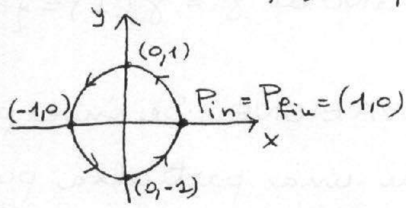


$P_{in} = \gamma(0) = (2,3)$ $P_{fin} = \gamma(1) = (0,-1)$

$2t = 2 - x \Rightarrow y = 3 - 2(2-x) \Rightarrow y = 2x - 1$

La curva è la legge del moto di una particella puntiforme che percorre la retta $y = 2x-1$ nel verso delle x decrescenti da $(2,3)$ a $(0,-1)$.

• 4 $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$



$P_{in} = \gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi) = P_{fin}$ $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ $\gamma(\pi) = (-1,0)$ $\gamma(\frac{3}{2}\pi) = (0,-1)$

$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (equazione della circonferenza di $C(0,0)$, $R = 1$)

La curva è la legge del moto di una particella puntiforme che compie un giro in verso antiorario sulla circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio $R = 1$ partendo da $(1,0)$.

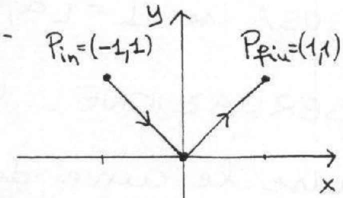
5 $\gamma: [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}$ $t \in [0,\pi]$

$P_{in} = \gamma(0) = (1,0) = \gamma(\pi) = P_{fin}$ $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1,0)$ $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (0,1)$ $\gamma(\frac{3}{4}\pi) = (0,-1)$

$x^2 + y^2 = \cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Di nuovo la particella puntiforme compie un giro in verso antiorario sulla circonferenza di $C(0,0)$ e $R = 1$ partendo da $(1,0)$. Le due curve (•4 e •5) differiscono però nell'intervallo di tempo su cui sono definite ($[0,2\pi]$ in •4 e $[0,\pi]$ in •5); in •5 il punto impiega metà tempo a compiere il giro e vedremo che si muove a velocità doppia rispetto a •4.

6 $\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$ $\begin{cases} x = t \\ y = |t| \end{cases}$ $t \in [-1,1]$



$P_{in} = \gamma(-1) = (-1,1)$ $P_{fin} = \gamma(1) = (1,1)$ $|t| = x \Rightarrow y = |x|$

La curva è la legge del moto di una particella puntiforme che percorre il grafico della funzione $f(x) = |x|$ nel verso delle

x crescenti da $(-1,1)$ a $(1,1)$.

Definizione (SOSTEGNO di una curva piana) Data una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, si dice SOSTEGNO di γ l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ corrispondenti ad un valore della variabile $t \in I$:

SOSTEGNO di $\gamma = \gamma(I) = \{ (x(t), y(t)) : t \in I \}$.

OSSERVAZIONE. Se interpretiamo la curva come la legge del moto di una particella puntiforme che si muove nel piano, allora il sostegno della curva è l'insieme dei punti del piano che costituiscono il percorso del moto. Negli esempi •1, •2, •3 il sostegno di γ è il segmento congiungente i punti $(0,-1)$ e $(2,3)$, mentre negli esempi •4 e •5 il sostegno di γ è la circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$. E' dunque evidente che esistono curve diverse aventi lo stesso sostegno; anzi, assegnato il sostegno, possiamo scrivere le equazioni parametriche di infinite curve aventi quel sostegno (giocando sull'intervallo di tempo, sul verso di percorrenza, sulla velocità di percorrenza, sul numero di volte che il sostegno viene percorso, e così via). Spesso le equazioni parametriche di una curva vengono dette PARAMETRIZZAZIONE della curva.

Definizione (CURVA CHIUSA) Una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ si dice CHIUSA se $I = [a,b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.

OSSERVAZIONE. Una curva è chiusa se $P_{in} = P_{fin}$; sono chiuse le curve degli esempi •4 e •5.

PARAMETRIZZAZIONI

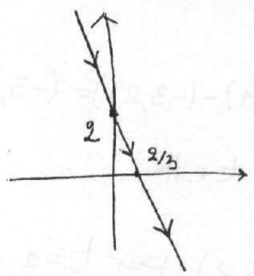
- Retta (in forma cartesiana) $y = mx + q$

$\gamma \begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ curva che percorre la retta nel verso delle x crescenti
per $t = 0$ siamo in $(0, q)$

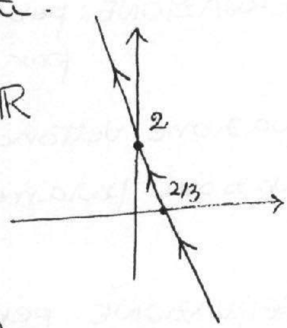
$\gamma \begin{cases} x = -t \\ y = -mt + q \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ curva che percorre la retta nel verso delle x decrescenti.
per $t = 0$ siamo in $(0, q)$

ESEMPIO. Scrivete una parametrizzazione della curva che percorre la retta $y = -3x + 2$ nel verso delle x crescenti, disegnandone anche il sostegno con il verso di percorrenza. Ripetere l'esercizio nel verso delle x decrescenti.

$\gamma \begin{cases} x = t \\ y = -3t + 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$



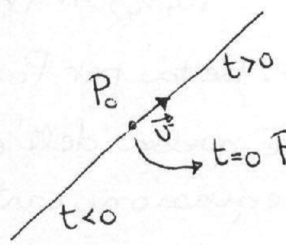
$\gamma \begin{cases} x = -t \\ y = 3t + 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$



- Retta (per un punto P_0 con direzione $\vec{v}$ assegnata)

equazione vettoriale $P = P_0 + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

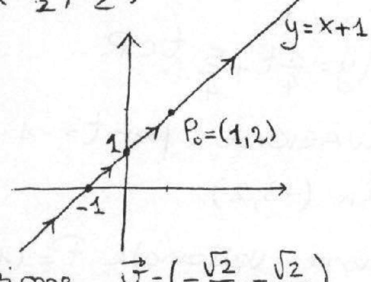
equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$



ESEMPIO. Retta per $P_0(1,2)$ con direzione $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

equazione vettoriale $P = (1,2) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

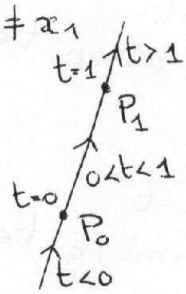


OSSERVAZIONE. La retta per $P_0(1,2)$ con direzione $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è la stessa retta percorsa nel verso delle x decrescenti.

• Retta (per due punti $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1,y_1)$)

equazione cartesiana $x=x_0$ se $x_0=x_1$

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \quad \text{se } x_0\neq x_1$$



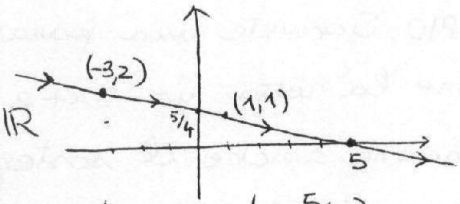
equazione vettoriale $P=P_0+t(P_1-P_0)$ $t\in\mathbb{R}$

equazioni parametriche $\begin{cases} x=x_0+t(x_1-x_0) \\ y=y_0+t(y_1-y_0) \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

ESEMPIO. Retta per $P_0=(-3,2)$ e $P_1=(1,1)$ nel verso delle x crescenti

equazione cartesiana $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

equazioni parametriche $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{4}t+\frac{5}{4} \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$



OSSERVAZIONE: per $t=-3$ siamo in $(-3,2)$, per $t=0$ in $(0,\frac{5}{4})$, per $t=1$ in $(1,1)$.

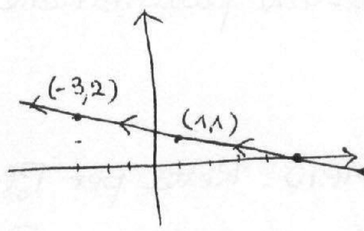
equazione vettoriale $P=(-3,2)+t((1,1)-(-3,2))=(-3,2)+t(4,-1)$ $t\in\mathbb{R}$

equazioni parametriche $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=2-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

OSSERVAZIONE: per $t=0$ siamo in $(-3,2)$, per $t=1$ in $(1,1)$, mentre $(0,\frac{5}{4})$ si trova per $t=\frac{3}{4}$.

ESEMPIO. Retta per $P_0=(-3,2)$ e $P_1=(1,1)$ nel verso delle x decrescenti.

La retta è quella dell'esempio precedente, quindi l'equazione cartesiana è la stessa, ma le equazioni parametriche sono date da $\begin{cases} x=-t \\ y=\frac{1}{4}t+\frac{5}{4} \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.



OSSERVAZIONE: per $t=-1$ siamo in $(1,1)$, per $t=0$ in $(0,\frac{5}{4})$, per $t=3$ in $(-3,2)$.

equazione vettoriale $P=(1,1)+t((-3,2)-(1,1))=(1,1)+t(-4,1)$ $t\in\mathbb{R}$

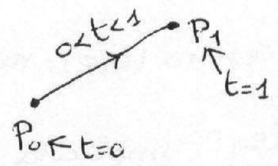
equazioni parametriche $\begin{cases} x=1-4t \\ y=1+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

OSSERVAZIONE: per $t=0$ siamo in $(1,1)$, per $t=1$ in $(-3,2)$, mentre $(0,\frac{5}{4})$ si trova per $t=\frac{1}{4}$.

- Segmento (da P_0 a P_1)

Equazione vettoriale $P = P_0 + t(P_1 - P_0)$ $t \in [0,1]$

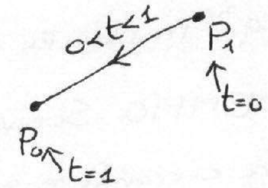
equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$ $t \in [0,1]$



- Segmento (da P_1 a P_0)

Equazione vettoriale $P = P_1 + t(P_0 - P_1)$ $t \in [0,1]$

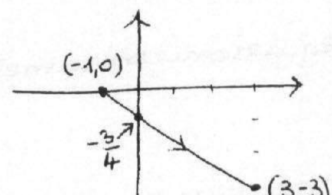
equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_1 + t(x_0 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_0 - y_1) \end{cases}$ $t \in [0,1]$



ESEMPIO. Segmento da $P_0 = (-1,0)$ a $P_1 = (3,-3)$.

equazione vettoriale $P = (-1,0) + t((3,-3) - (-1,0)) = (-1,0) + t(4,-3)$ $t \in [0,1]$

equazioni parametriche $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -3t \end{cases}$ $t \in [0,1]$



(fare sempre la verifica : $t=0 \to (-1,0)$, $t=1 \to (3,-3)$)

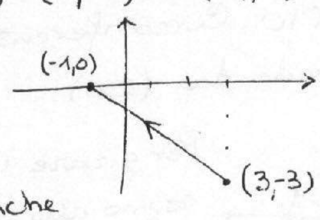
OSSERVAZIONE - Si può usare anche l'equazione cartesiana (prima bisogna trovarla ed è $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$) e poi le equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{4}t - \frac{3}{4} \end{cases}$ $t \in [-1,3]$.

in questo caso il parametro è l'ascissa

ESEMPIO. Segmento da $P_1 = (3,-3)$ a $P_0 = (-1,0)$.

equazione vettoriale $P = (3,-3) + t((-1,0) - (3,-3)) = (3,-3) + t(-4,3)$

equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$ $t \in [0,1]$



OSSERVAZIONE - L'equazione cartesiana è sempre $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ ma le equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = -t \\ y = \frac{3}{4}t - \frac{3}{4} \end{cases}$ $t \in [-3,1]$ ← il parametro è $t = -x$

- Circonferenze

centro $(0,0)$ raggio R $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$ 1 giro in verso antiorario partendo da $(R,0)$ con velocità costante $= R$

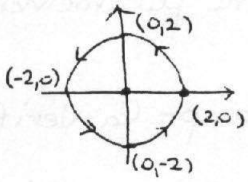
(eq.ne implicita $x^2+y^2=R^2$)

centro (x_0,y_0) raggio R $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$

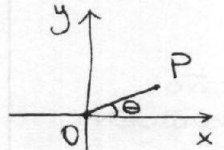
(eq.ne implicita $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$).

ESEMPIO. Scrivete una parametrizzazione della curva che percorre la circonferenza di centro $(0,0)$ e $R=2$ in <u>verso antiorario</u> partendo da $(2,0)$, disegnandone anche il sostegno con il verso di percorrenza.

equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$

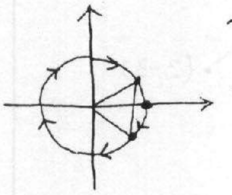


OSSERVAZIONE (<u>IMPORTANTE</u>) Parametrizzando la circonferenza <u>in questo modo</u> il parametro t è in realtà l'angolo θ che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle x



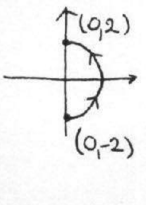
Così ad esempio il punto $(R\frac{\sqrt2}{2}, R\frac{\sqrt2}{2})$ che è sulla bisettrice corrisponderà a $t=\frac{\pi}{4}$, mentre $(0,R)$ a $t=\frac{\pi}{2}$ e $(-R\frac{\sqrt2}{2}, -R\frac{\sqrt2}{2})$ a $t=\frac{5}{4}\pi$ (sulla bisettrice ma dall'altra parte).

ESEMPIO. Circonferenza di centro $(0,0)$ e $R=2$ in <u>verso orario</u> partendo da $(2,0)$.



Per girare in senso orario si può pensare di cambiare segno alla y $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$.

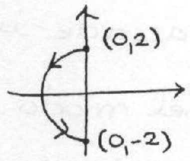
ESEMPIO. Semicirconferenza di centro $(0,0)$ e $R=2$ in verso antiorario da $(0,-2)$ a $(0,2)$:



$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (oppure $t \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$).

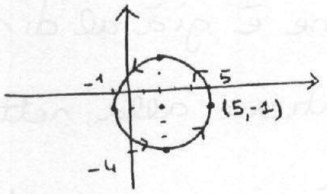
ESEMPIO Semicirconferenza di centro (0,0) e $R=2$ in verso antiorario da (0,2) a (0,-2):

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right].$$



ESEMPIO. Circonferenza di centro (2,-1) e $R=3$ in verso antiorario partendo da (5,-1):

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$



ESEMPIO. Circonferenza di centro (2,-1) e $R=3$ in verso antiorario partendo da (-1,-1):

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\pi, 3\pi] \quad (\text{oppure } t \in [-\pi, \pi])$$

- Ellissi

centro (0,0) semiassi (a,b) (equazione implicita $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

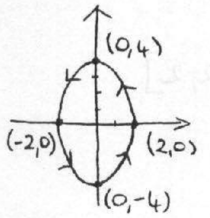
Così si fa un giro in verso antiorario partendo da (a,0). Ogni quarto di ellisse viene percorso in tempo $\frac{\pi}{2}$, ma <u>la velocità non è costante</u>.

centro (x_0, y_0) semiassi (a,b) (eq.^{ne} implicita $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$)

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ESEMPIO. Scrivete una parametrizzazione della curva che percorre l'ellisse di centro (0,0) e semiassi (2,4) in verso antiorario partendo da (2,0), disegnandone anche il sostegno con il verso di percorrenza.

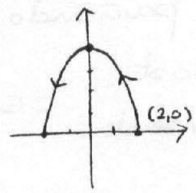
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



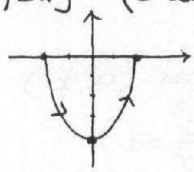
OSSERVAZIONE (<u>IMPORTANTE</u>) Il parametro t non è l'angolo θ (come accade invece per la circonferenza parametrizzata nel modo canonico). Nell'esempio precedente per $t=\frac{\pi}{4}$ troviamo il punto $\left(2\cos\frac{\pi}{4}, 4\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ che è già al di sopra della bisettrice (infatti appartiene alla retta $y=2x$).

ESEMPIO. Metà superiore dell'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $(2,4)$ in verso antiorario partendo da $(2,0)$:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0,\pi].$$



Metà inferiore : $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [\pi, 2\pi]$ (o anche $t \in [-\pi, 0]$).

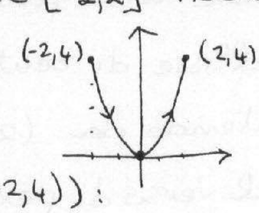


- Grafici

Se una curva percorre il grafico della funzione $y=f(x)$ per $x \in [a,b]$, nel verso delle x crescenti, allora si può sempre parametrizzare nel seguente modo

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \quad \left(\begin{array}{l}\text{si prende come parametro} \\ \text{l'ascissa : } t=x\end{array}\right).$$

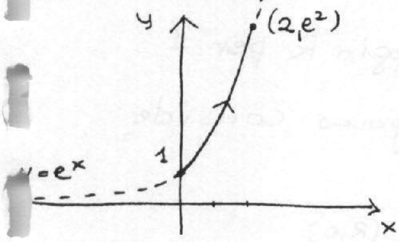
ESEMPIO. Scrivete una parametrizzazione della curva che percorre il grafico di $y=x^2$ per $x \in [-2,2]$ nel verso delle x crescenti: $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \quad t \in [-2,2]$



nel verso delle x decrescenti (da $(2,4)$ a $(-2,4)$):

$$\begin{cases} x=-t \\ y=t^2 \end{cases} \quad t \in [-2,2].$$

ESEMPIO - curva che percorre il grafico di $y = e^x$ da $(0,1)$ a $(2, e^2)$ (quindi nel verso delle x crescenti):

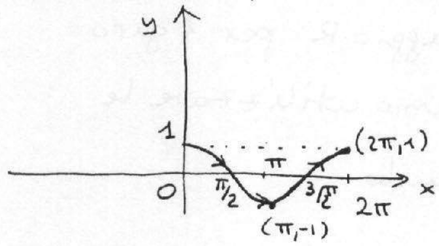


$$\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases} \quad x \in [0,2]$$

nel verso delle x decrescenti:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = e^{-t} \end{cases} \quad t \in [-2,0] \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 2-t \\ y = e^{2-t} \end{cases} \quad t \in [0,2]$$

ESEMPIO. curva che percorre il grafico della funzione $f(x) = \cos x$ per $x \in [0, 2\pi]$ nel verso delle x crescenti:



$$\begin{cases} x = t \\ y = \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

nel verso delle x decrescenti:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = \cos(-t) = \cos t \end{cases} \quad t \in [-2\pi, 0]$$

($f(x) = \cos x$ è una funzione pari, cioè $f(-x) = f(x)$)

oppure

$$\begin{cases} x = 2\pi - t \\ y = \cos(2\pi - t) = \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

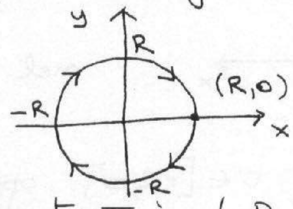
- Circonferenze e ellissi percorse in <u>verso orario</u>

Partiamo dalle equazioni parametriche $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\text{sen}\,t \end{cases} \; t \in [0, 2\pi]$

utilizzate per percorrere la circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio R per 1 giro in verso antiorario partendo da $(R, 0)$. Se immaginiamo di percorrere la circonferenza in verso orario, ci accorgiamo che <u>partendo da $(R,0)$</u> l'ascissa $x(t)$ è la stessa nei due versi; invece l'ordinata $y(t)$

cambia segno in quanto assume prima i valori negativi e poi quelli positivi. Allora le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza di $C(0,0)$ e raggio R per 1 giro in verso orario partendo da $(R,0)$ si ottengono considerando

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = -R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$



Notiamo che per $t = \frac{\pi}{2}$ siamo in $(0,-R)$, per $t=\pi$ in $(-R,0)$, e per $t = \frac{3}{2}\pi$ in $(0,R)$.

Se vogliamo scrivere le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza di $C(0,0)$ e raggio R per 1 giro in verso orario partendo da $(-R,0)$ possiamo utilizzare le stesse equazioni parametriche considerando

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = -R\sin t \end{cases} \quad t \in [\pi, 3\pi].$$

Possiamo però anche ragionare in modo diverso confrontando direttamente l'ascissa e l'ordinata di un punto che si muove in verso orario <u>partendo da $(-R,0)$</u> con l'ascissa e l'ordinata di un punto che si muove in verso antiorario <u>partendo da $(R,0)$</u>. Ci accorgiamo così che l'ascissa del nostro punto in verso orario ha segno opposto rispetto all'ascissa del punto che si muove in verso antiorario (infatti parte dal valore $-R$ per crescere fino al valore R e poi decrescere fino al valore $-R$) mentre l'ordinata è la stessa nei due versi. Allora possiamo percorrere la circonferenza per un giro in verso orario partendo da $(-R,0)$ anche considerando le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$. Si noti che per $t = \frac{\pi}{2}$ siamo in $(0, R)$, per $t = \pi$ in $(R, 0)$, e per $t = \frac{3}{2}\pi$ in $(0, -R)$.

Ragionando in modo analogo si ottengono le seguenti equazioni parametriche:

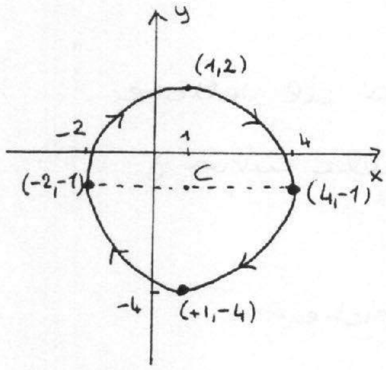
$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 - R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

1 giro in verso orario sulla circonferenza di $C(x_0, y_0)$ e raggio R partendo da $(x_0 + R, y_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 - b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

1 giro in verso orario sull'ellisse di $C(x_0, y_0)$ e semiassi (a, b) partendo da $(x_0 + a, y_0)$.

ESEMPIO. Scrivete le equazioni parametriche di una curva che compie un giro in verso orario sulla circonferenza di centro $C(1, -1)$ e $R = 3$ partendo da $(4, -1)$. Stesso esercizio partendo da $(-2, -1)$.



partendo da $(4, -1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = -1 - 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

partendo da $(-2, -1)$

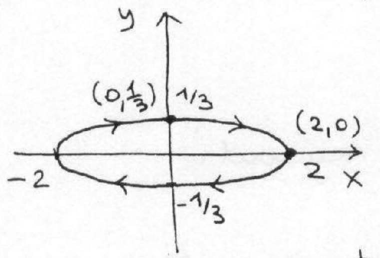
$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = -1 - 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\pi, 3\pi]$$

oppure

$$\begin{cases} x = 1 - 3\cos t \\ y = -1 + 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

ESEMPIO. Scrivete le equazioni parametriche di una curva che compie un giro in verso orario sull'ellisse

di centro $C(0,0)$ e semiassi $(2, \frac{1}{3})$ partendo da $(2,0)$.
Stesso esercizio partendo da $(0, \frac{1}{3})$.



partendo da $(2,0)$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

partendo da $(0, \frac{1}{3})$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -2\cos t \\ y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right].$$

$$\left(\text{opp. } t \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]\right)$$

VETTORE TANGENTE

Consideriamo una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ed un punto $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$ sul sostegno di γ corrispondente all'istante di tempo $t_0 \in I$. Se le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili in $t = t_0$, allora il VETTORE $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ si dice VETTORE DERIVATO di γ in t_0.

Facciamo vedere che in due esempi semplici il vettore derivato risulta tangente al sostegno della curva γ nel punto P_0 scelto.

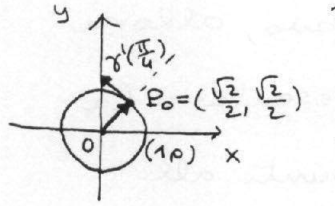
• 1 Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$ percorsa in verso antiorario partendo da $(1,0)$)

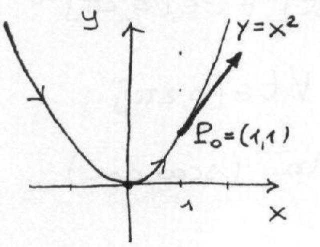
e sia $P_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Il punto P_0 corrisponde all'istante di tempo $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Il vettore $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ che definisce la curva (detto anche VETTORE POSIZIONE perchè fornisce la posizione del punto all'istante t) è derivabile per ogni

t e il vettore derivato risulta $\gamma'(t)=(-\operatorname{sen} t, \cos t)\ \forall t\in[0,2\pi]$.



Per $t=\frac{\pi}{4}$ otteniamo il vettore $\gamma'(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$ che risulta tangente alla circonferenza in P_0 (infatti il prodotto scalare $\langle \overrightarrow{OP_0}, \gamma'(\frac{\pi}{4})\rangle=0$).

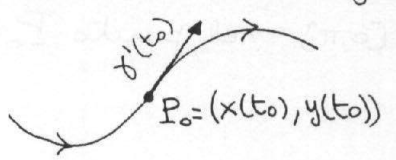
• 2 Sia γ la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ (parabola di equazione $y=x^2$ percorsa nel verso delle x crescenti) e sia $P_0=(1,1)$. Il punto P_0 corrisponde all'istante di tempo $t_0=1$ (il parametro è l'ascissa del punto). Il vettore $\gamma(t)=(t,t^2)$ è derivabile per ogni t e il vettore derivato risulta $\gamma'(t)=(1,2t)\ \forall t\in\mathbb{R}$.



Per $t=1$ otteniamo il vettore $\gamma'(1)=(1,2)$ che risulta tangente alla parabola in P_0 (infatti è noto che il coefficiente angolare della retta tangente a $y=x^2$ in $x=1$ è $m=2$).

In generale si può dimostrare che se $x'(t_0)$ e $y'(t_0)$ non sono contemporaneamente nulli (altrimenti $\gamma'(t_0)=(0,0)$ e non abbiamo nessun vettore) allora il vettore $\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ risulta tangente al sostegno di γ in $P_0=(x(t_0),y(t_0))$.

Definizione (VETTORE TANGENTE). Sia $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ una curva e sia $P_0=(x(t_0),y(t_0))$ il punto del sostegno di γ corrispondente all'istante di tempo $t_0\in I$. Se le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili in t_0 e $(x'(t_0),y'(t_0))\neq(0,0)$, allora il vettore $\gamma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ si dice VETTORE TANGENTE alla curva γ nel punto P_0.



Se interpretiamo la curva γ come la legge del moto di una particella puntiforme che si muove nel piano, allora il vettore $\gamma'(t_0)$ e il suo modulo $|\gamma'(t_0)|$ rappresentano la velocità (vettoriale) e la velocità (scalare) del punto all' istante t_0.

• 1 Abbiamo già calcolato il vettore tangente alla curva γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ nel punto $P_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$: $\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Il modulo di questo vettore è $|\gamma'(\frac{\pi}{4})| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, quindi all' istante $t = \frac{\pi}{4}$ il punto si sta muovendo con velocità 1. In realtà il vettore tangente è $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ $\forall t \in [0, 2\pi]$ e il suo modulo risulta $|\gamma'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$ $\forall t \in [0, 2\pi]$, quindi la circonferenza viene percorsa a velocità (scalare) costante 1.

OSSERVAZIONE. Quando percorriamo una circonferenza di raggio R in verso antiorario o orario utilizzando le equazioni parametriche introdotte precedentemente

($\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R \operatorname{sen} t \end{cases}$ per il verso antiorario e $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 - R \operatorname{sen} t \end{cases}$ per il verso orario)

la circonferenza viene percorsa con <u>velocità (scalare) costante uguale al raggio R</u>. Infatti $\gamma'(t) = (-R \operatorname{sen} t, R\cos t)$ (oppure $\gamma'(t) = (-R \operatorname{sen} t, -R\cos t)$) e in entrambi i casi si ha $|\gamma'(t)| = \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t} = \sqrt{R^2} = R$.

ESEMPIO. Determinate il vettore tangente alla curva di eq.^{ni} parametriche $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$ nel punto $P_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

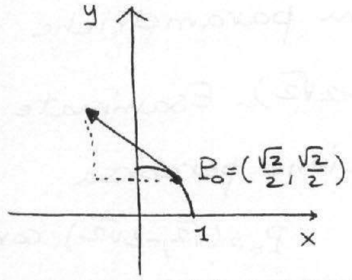
Esaminate poi la velocità scalare con cui la circonferenza viene percorsa, confrontando con • 1.

Abbiamo già visto che il punto materiale compie un giro in verso antiorario sulla circonferenza di $C(0,0)$ e $R=1$ partendo da $(1,0)$. Il punto $P_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ corrisponde all'istante di tempo $t_0=\frac{\pi}{8}$ (infatti $\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{8}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Il vettore $\gamma(t)=(\cos(2t),\operatorname{sen}(2t))$ è derivabile per ogni $t\in[0,\pi]$ e il vettore derivato risulta $\gamma'(t)=(-2\operatorname{sen}(2t),\,2\cos(2t))$ $\forall t\in[0,\pi]$.

Per $t=\frac{\pi}{8}$ otteniamo il vettore tangente alla curva in P_0:

$\gamma'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left(-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right),2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

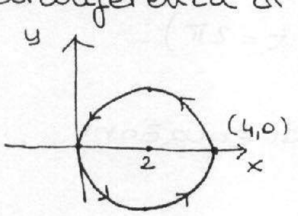


Il vettore tangente trovato ha la stessa direzione del vettore tangente in • 1, ma è lungo il doppio: $\left|\gamma'\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|=\sqrt{2+2}=2$.

Il modulo del vettore tangente $|\gamma'(t)|=\sqrt{4\operatorname{sen}^2(2t)+4\cos^2(2t)}=$
$=\sqrt{4}=2$ $\forall t\in[0,\pi]$, pertanto la circonferenza viene percorsa con velocità (scalare) costante 2. Rispetto a • 1 la circonferenza viene percorsa a velocità doppia e in metà tempo.

ESEMPIO. Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza $x^2-4x+y^2=0$ per un giro in verso antiorario partendo da $(4,0)$. Stesso esercizio con velocità 4. Stesso esercizio con velocità 1.

La circonferenza ha equazione $(x-2)^2+y^2=4$, quindi è la circonferenza di $C(2,0)$ e $R=2$.



$$\begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

1 giro in verso ant. partendo da $(4,0)$ con velocità costante 2 (la velocità è uguale al raggio)

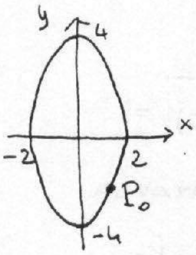
Per percorrere la circonferenza a velocità 4 dobbiamo raddoppiare la velocità, mentre per percorrerla a velocità 1 dobbiamo dimezzarla:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos(2t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(2t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi] \qquad \begin{cases} x = 2 + 2\cos(t/2) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t/2) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$

con velocità 4 con velocità 1

(si noti che raddoppiando la velocità si impiega metà tempo, mentre dimezzando la velocità il tempo raddoppia).

ESEMPIO. Determinate il vettore tangente alla curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ nel punto $P_0 = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. Esaminate poi la velocità scalare con cui l'ellisse viene percorsa.



$P_0 = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ corrisponde all'istante di tempo $t_0 = \frac{7}{4}\pi$

$$\left(\begin{cases} 2\cos t = \sqrt{2} \\ 4\,\mathrm{sen}\,t = -2\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{7}{4}\pi \right)$$

$\gamma'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t)$ $\quad \gamma'(t_0) = \gamma'(\frac{7}{4}\pi) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$$|\gamma'(t_0)| = \sqrt{2 + 8} = \sqrt{10}$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 16\cos^2 t} = 2\sqrt{\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t}$$

$|\gamma'(0)| = 4 \quad |\gamma'(\frac{\pi}{2})| = 2 \quad |\gamma'(\pi)| = 4 \quad |\gamma'(\frac{3}{2}\pi)| = 2$

La velocità non è costante: all'istante iniziale la velocità è massima $(=4)$, poi rallenta fino alla velocità minima $(=2$ per $t = \frac{\pi}{2})$, poi accellera fino alla velocità massima $(=4, t = \pi)$, ridiminuisce fino alla velocità minima $(=2, t = \frac{3}{2}\pi)$, riaumenta fino alla velocità massima $(=4, t = 2\pi)$.

OSSERVAZIONE. Quando consideriamo la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 \pm b\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ che percorre l'ellisse di $C(x_0, y_0)$ e semiassi (a,b) in verso antiorario o orario partendo da $(x_0 + a, y_0)$, possiamo osservare che il punto si muove con una velocità che non è costante. Infatti

$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 \text{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}$ $\left(|\gamma'(0)| = |\gamma'(\pi)| = b, \ |\gamma'(\frac{\pi}{2})| = |\gamma'(\frac{3}{2}\pi)| = a \right)$

e si può dimostrare che la velocità è crescente su $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ se $a > b$, mentre la velocità è crescente su $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ se $a < b$.

RETTA TANGENTE

Data una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e un punto $P_0 = (\underset{x_0}{x(t_0)}, \underset{y_0}{y(t_0)})$ sul sostegno di γ corrispondente all'istante di tempo $t_0 \in I$, diciamo <u>retta tangente</u> alla curva γ in P_0 la retta che passa per il punto P_0 e che ha la direzione del vettore tangente.

- <u>equazione vettoriale</u>: $P = P_0 + t\gamma'(t_0)$ $\quad t \in \mathbb{R}$
- <u>equazioni parametriche</u>: $\begin{cases} x = x_0 + t\,x'(t_0) \\ y = y_0 + t\,y'(t_0) \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$
- <u>equazione cartesiana</u>: $x = x_0$ se $x'(t_0) = 0$

  $y = y_0$ se $y'(t_0) = 0$

  $$y = y_0 + \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0) \quad \text{se } x'(t_0) \cdot y'(t_0) \neq 0$$

• 1 Scrivete sia l'equazione parametrica sia l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ nel punto $P_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Abbiamo già visto che P_0 corrisponde a $t_0=\frac{\pi}{4}$ e che $\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Allora

eq.^{ni} parametriche della retta tangente $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

eq.^{ne} cartesiana : $\frac{\sqrt{2}}{2}t=\frac{\sqrt{2}}{2}-x \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-x$

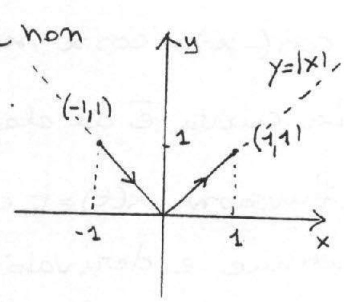
$$y=-x+\sqrt{2}$$

CURVE di CLASSE C^1, di CLASSE C^1 a tratti, REGOLARI

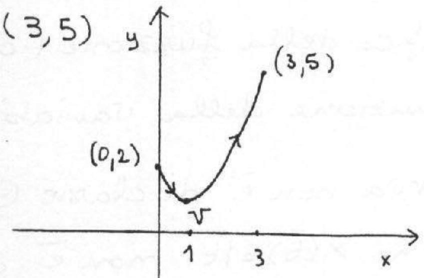
Definizione (CURVA di CLASSE C^1). Una curva $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ si dice di classe C^1 se le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono di classe C^1 (cioè continue, derivabili e con derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ continue).

OSSERVAZIONE. Se l'intervallo I è chiuso, ad esempio $I=[a,b]$, allora $\gamma\in C^1(I)$ significa che $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili anche agli estremi dell'intervallo (derivata destra in $x=a$: $x'_+(a)$, $y'_+(a)$; derivata sinistra in $x=b$: $x'_-(b)$, $y'_-(b)$) e che le derivate $x'(t)$, $y'(t)$ sono continue fino agli estremi dell'intervallo compresi.

ESEMPI. Negli esempi visti all'inizio (pag. 4-5) la curva definita in • 1 è di classe C^1: infatti le due funzioni $x(t)=t$ e $y(t)=2t-1$ sono di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$ ($x'(t)=1$, $y'(t)=2$).
Allo stesso modo è facile verificare che sono di classe C^1 anche le curve definite in • 2 ($x'(t)=1$, $y'(t)=2$), in • 3 ($x'(t)=-2$, $y'(t)=-4$), in • 4 ($x'(t)=-\operatorname{sen} t$, $y'(t)=\cos t$) e in • 5 ($x'(t)=-2\operatorname{sen}(2t)$, $y'(t)=2\cos(2t)$).
Invece la curva $\gamma:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ dell'esempio • 6 definita da $\gamma(t)=(t,|t|)$ non è di classe C^1 in quanto la funzione $y(t)=|t|$ pur essendo continua non è derivabile per $t=0$ ($y'_-(0)=-1\neq y'_+(0)=1$).
Si noti che invece la funzione $x(t)=t$ è di classe C^1.

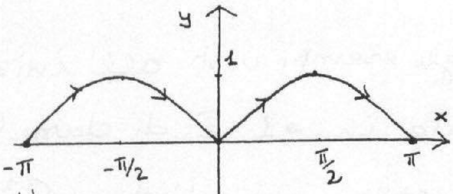


ESEMPI_ 1) Sia $\gamma:[2,5]\to\mathbb{R}^2$ la curva definita da $\begin{cases} x=t-2 \\ y=t^2-6t+10 \end{cases}$
La curva γ è sicuramente di classe C^1 perchè $x(t)=t-2$ e $y(t)=t^2-6t+10$ sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ con derivate $x'(t)=1$ e $y'(t)=2t-6$ anch'esse continue.
La curva ha $P_{in}=(0,2)$, punto finale $P_{fin}=(3,5)$ e percorre il grafico della parabola di equazione $y=x^2-2x+2$ di vertice $V(1,1)$ rivolta verso l'alto.



2) Sia $\gamma:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^2$ la curva definita da $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\operatorname{sen}|t| \end{cases}$ $t\in[-\pi,\pi]$.
La curva ha $P_{in}=(-\pi,0)$, $P_{fin}=(\pi,0)$ e percorre il grafico della funzione $f(x)=\operatorname{sen}|x|$ (che corrisponde a $f(x)=\operatorname{sen} x$

se $x \geq 0$ e a $f(x) = \text{sen}(-x)$ se $x < 0$).

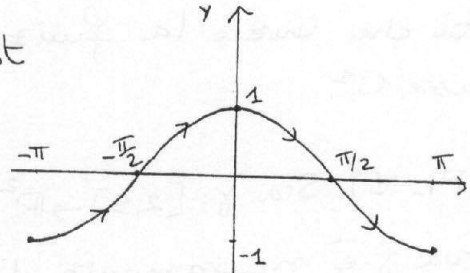


La curva non è di classe C^1 perchè la funzione $y(t) = \text{sen}|t|$ pur essendo continua non è derivabile per $t=0$: infatti $y'_+(0) = \lim_{t\to 0^+} y'(t) = \lim_{t\to 0} \cos t = 1 \neq y'_-(0) =$

$= \lim_{t\to 0^-} y'(t) = \lim_{t\to 0^-} -\cos(-t) = -1$. Invece $x(t) = t$ è di classe C^1.

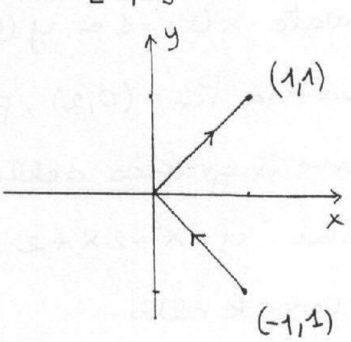
3) Sia $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\begin{cases} x = t \\ y = \cos|t| \end{cases}$ $t \in [-\pi,\pi]$.

La curva ha $P_{in} = (-\pi,-1)$, $P_{fin} = (\pi,-1)$ e percorre il grafico della funzione $f(x) = \cos|x|$ (che corrisponde a $f(x) = \cos x$ se $x \geq 0$ e a $f(x) = \cos(-x) = \cos x$ se $x < 0$ essendo il $\cos x$ una funzione pari). La curva è di classe C^1 perchè le due funzioni $x(t) = t$ e $y(t) = \cos|t| = \cos t$ sono continue e derivabili e le derivate $x'(t) = 1$ e $y'(t) = -\text{sen}\,t$ sono a loro volta continue.



4) Sia $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\begin{cases} x = |t| \\ y = t \end{cases}$ $t \in [-1,1]$.

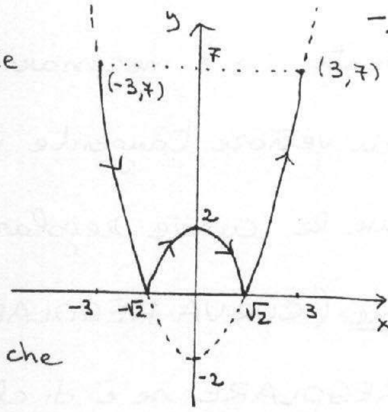
La curva ha $P_{in} = (1,-1)$, $P_{fin} = (1,1)$ e percorre il grafico della funzione (che assegna x in funzione della variabile y) $x = |y|$.



La curva non è di classe C^1 perchè la funzione $x(t) = |t|$ non è derivabile per $t = 0$ ($x'_+(0) = 1 \neq x'_-(0) = -1$). Invece $y(t) = t$ è di classe C^1.

5) Sia $\gamma : [-3,3] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t^2 - 2| \end{cases}$ $t \in [-3,3]$.

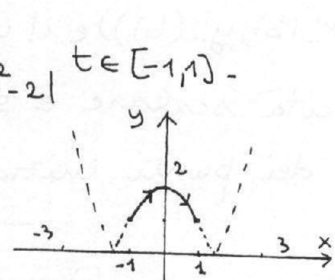
La curva ha $P_{in}=(-3,7)$, $P_{fin}=(3,7)$ e percorre il grafico della funzione $f(x)=|x^2-2|$.



La curva non è di classe C^1 perchè la funzione $y(t)=|t^2-2|$ pur essendo continua non è derivabile per $t=\pm\sqrt{2}$. Si noti infatti che $y(t)=t^2-2$ se $t<-\sqrt{2}$ oppure $t>\sqrt{2}$, mentre $y(t)=2-t^2$ se $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ e quindi $y'_-(-\sqrt{2})=\lim_{t\to(-\sqrt{2})^-} y'(t)=\lim_{t\to(-\sqrt{2})^-} 2t=-2\sqrt{2}\neq$ $y'_+(-\sqrt{2})=\lim_{t\to(-\sqrt{2})^+} y'(t)=\lim_{t\to(-\sqrt{2})^+} -2t=2\sqrt{2}$. Analogamente $y'_-(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\neq$ $\neq 2\sqrt{2}=y'_+(\sqrt{2})$. Invece $x(t)=t$ è di classe C^1.

) Sia $\gamma:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ la curva definita da $\begin{cases} x=t \\ y=|t^2-2| \end{cases}$ $t\in[-1,1]$.

La curva ha $P_{in}=(-1,1)$, $P_{fin}=(1,1)$ e percorre il grafico della stessa funzione $f(x)=|x^2-2|$ dell'esempio precedente. Tuttavia nell'intervallo [-1,1] l'argomento t^2-2 del valore assoluto ha sempre segno negativo e quindi le equazioni parametriche che definiscono la curva sono $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=2-t^2 \end{cases}$ $t\in[-1,1]$. Allora la curva è di classe C^1 perchè $x(t)$ e $y(t)$ sono continue e derivabili e le derivate $x'(t)=1$, $y'(t)=-2t$ sono anch'esse continue.



———o———

Per una curva di classe C^1 può succedere che il vettore derivato $\gamma'(t)=(x'(t),y'(t))$ risulti $(0,0)$ per qualche valore del parametro t per il quale non sarà possibile determinare il vettore tangente al sostegno di γ nel punto $P=(x(t),y(t))$

corrispondente. Se è necessario lavorare con una curva provvista di vettore tangente in ogni punto, allora conviene considerare le curve regolari.

Definizione (CURVA REGOLARE). Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si dice REGOLARE se è di classe C^1 in $[a,b]$ e se il vettore $\gamma'(t)$ è diverso dal vettore nullo $\forall t \in]a,b[$, cioè

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0 \quad \forall t \in]a,b[.$$

OSSERVAZIONE. Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva regolare, allora il vettore derivato è definito $\forall t \in [a,b]$ ($\gamma'(a) = (x'_+(a), y'_+(a))$, $\gamma'(b) = (x'_-(b), y'_-(b))$) e il vettore tangente esiste $\forall t \in]a,b[$. La velocità scalare è sempre >0 ad eccezione eventualmente dei punti iniziale e finale in cui può essere nulla.

———— o ————

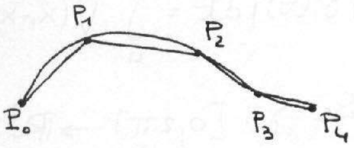
Talvolta non si dispone di una curva di classe C^1, ma solo di curve composte da un numero finito di tratti di classe C^1. In molte applicazioni questo è sufficiente. Diamo allora la seguente definizione.

Definizione (curva di classe C^1 a tratti). Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si dice C^1 a tratti se l'intervallo $[a,b]$ si può dividere in un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ risulta di classe C^1.

LUNGHEZZA di una curva

La lunghezza di una curva si definisce per approssimazione utilizzando linee spezzate.

Data una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, ogni linea spezzata di estremi un <u>numero finito</u> di punti $P_i = \gamma(t_i)$ con $t_i < t_{i+1}$ e $t_i \in I$ $\forall i$ si dice POLIGONALE INSCRITTA nella curva γ.



<u>Definizione</u> (LUNGHEZZA di una curva). Data una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ si definisce LUNGHEZZA di γ il numero ($\in [0, +\infty]$)

$$L(\gamma) = \sup_P L(P)$$

dove P varia fra tutte le possibili poligonali inscritte nella curva γ e $L(P)$ è la lunghezza della poligonale.

OSSERVAZIONE. Si dimostra che $L(\gamma)$ è indipendente dalla parametrizzazione scelta per γ e dal verso di percorrenza.

La definizione di lunghezza per approssimazione non è molto pratica per il calcolo. Si dimostra allora il seguente teorema

TEOREMA (lunghezza di una curva di classe C^1). Se $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva di classe C^1, allora

1) $L(\gamma) < +\infty$

2) $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

ESEMPIO. Se $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ è la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=x_0+t(x_1-x_0) \\ y=y_0+t(y_1-y_0)\end{cases}$ $t\in[0,1]$ che percorre il segmento da $P_0=(x_0,y_0)$ a $P_1=(x_1,y_1)$, ritroviamo la nota formula per la lunghezza di un segmento. Infatti $\gamma'(t)=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ e

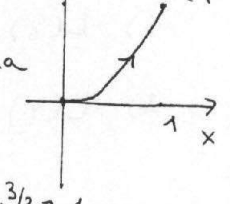
$$L(\gamma)=\int_0^1|\gamma'(t)|\,dt=\int_0^1\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,dt=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}.$$

ESEMPIO. Se $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ è la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=x_0+R\cos t \\ y=y_0+R\,\mathrm{sen}\,t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ che percorre la circonferenza di centro $C(x_0,y_0)$ e raggio R, ritroviamo la nota formula per la lunghezza di una circonferenza. Infatti $\gamma'(t)=(-R\,\mathrm{sen}\,t,R\cos t)$ e

$$L(\gamma)=\int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|\,dt=\int_0^{2\pi}R\,dt=2\pi R.$$

ESEMPIO. Se $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ è la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=t \\ y=f(t)\end{cases}$ che percorre il grafico della funzione $f(x)$ di classe C^1 per $x\in[a,b]$, allora la formula per il calcolo della lunghezza di γ diventa $L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

ESEMPIO. Calcolate la lunghezza della curva $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3\end{cases}$ $t\in[0,1]$.



La curva ha $P_{in}=(0,0)$, $P_{fin}=(1,1)$ e percorre il grafico della funzione $f(x)=x^{3/2}$. La curva γ è di classe C^1, $\gamma'(t)=(2t,3t^2)$ e la lunghezza è data da

$$L(\gamma)=\int_0^1\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=\frac{1}{18}\int_0^1 18t(4+9t^2)^{1/2}dt=\frac{1}{18}\left[\frac{(4+9t^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8).$$

ESERCIZI sulle CURVE

Disegnare il sostegno delle seguenti curve con il verso di percorrenza, scrivendo anche l'equazione cartesiana di ogni tratto. Determinare inoltre i vettori tangente e normale, i versori tangente e normale, e le rette tangente e normale nei punti a fianco indicati.

1) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = 3t \\ y = 1+2t \end{cases}$ 2) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = 3-3t \\ y = 3-2t \end{cases}$

3) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-3t \end{cases}$ 4) $\gamma: [1,4] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = -t+3 \end{cases}$

5) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = -1-4t \\ y = -1+2t \end{cases}$ 6) $\gamma: [-3,2] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = -t^2-2t \end{cases}$ $P_0 = (-2,0)$

7) $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $P_0 = (\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$ 8) $\gamma: [0,6] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = t^2-4t+8 \end{cases}$

9) $\gamma: [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = -3+2\cos t \\ y = -2+2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ 10) $\gamma: [-1,2] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases}$ $P_0 = (0,1)$

11) $\gamma: [\pi,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ 12) $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = -\text{sen}\,t \end{cases}$ $P_0 = (\pi,0)$

13) $\gamma: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = 1+3\cos t \\ y = -1+\text{sen}\,t \end{cases}$ 14) $\gamma: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = \cos t \\ y = -2+\text{sen}\,t \end{cases}$

15) $\gamma: [1,4] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = \log(1+t) \end{cases}$ 16) $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

17) $\gamma: [-2,4] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = t \\ y = |t^2-4| \end{cases} t \in [-2,3]$ $\begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases} t \in [3,4]$ $P_0 = (1,3)$

18) $\gamma: [-\pi,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = \pi+\pi\cos t \\ y = \pi\,\text{sen}\,t \end{cases} t \in [-\pi,0]$ $\begin{cases} x = 2\pi-t \\ y = \text{sen}(2\pi-t) \end{cases} t \in]0,2\pi]$

$P_0 = (\pi,0)$

19) $\gamma: [-\frac{\pi}{2}, 6] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 4t - t^2 \end{cases}$ $t \in]0,4[$

$\begin{cases} x = t-6 \\ y = 4-t \end{cases}$ $t \in [4,6]$ $P_0 = (1,3)$

20) $\gamma: [-\pi, 4] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = -1+\cos t \\ y = \text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [-\pi, 0]$ $\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 + 2t \end{cases}$ $t \in [0,3]$

$\begin{cases} x = t \\ y = -3 \end{cases}$ $t \in [3,4]$ $P_0 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

21) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$ $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 5\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [\pi, 2\pi]$ $P_0 = (-\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{5}{2})$

22) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \end{cases}$ $t \in [1, \pi]$ $\begin{cases} x = 2\pi + \pi\cos t \\ y = \frac{\pi - 3}{2} + \text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [\pi, 2\pi]$

$P_0 = (2, -\frac{1}{2})$

23) $\gamma: [0,2] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = -t^4 + 3t^2 \end{cases}$ $P_0 = (1,2)$ $P_0 = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{9}{4})$

24) $\gamma: [0, 2\pi+1] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$ $\begin{cases} x = 2+2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [\pi, 2\pi]$

$\begin{cases} x = 4+4\pi - 2t \\ y = 2t - 4\pi \end{cases}$ $t \in [2\pi, 2\pi+1]$ $P_0 = (2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

25) $\gamma: [-2,3] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ $t \in [-2, 0]$ $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} + 1 \end{cases}$ $t \in [0,3]$ $P_0 = (1,2)$

26) $\gamma: [-1,3] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases}$ $t \in [-1,1]$ $\begin{cases} x = t \\ y = |t-2| \end{cases}$ $t \in [1,3]$

27) $\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = e^{-t^2} \end{cases}$ 28) $\gamma: [1, e^2] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = \log t \end{cases}$

29) $\gamma: [0,6] \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in [0,1]$ $\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \end{cases}$ $t \in [1,2]$

$\begin{cases} x = \cos(\frac{\pi}{4}t) \\ y = 1 + \text{sen}(\frac{\pi}{4}t) \end{cases}$ $t \in [2,6]$

Scrivete le equazioni parametriche delle seguenti curve, disegnandone anche il sostegno con il verso di percorrenza. Scrivete anche le equazioni della retta tangente e della retta normale nei punti a fianco indicati.

1) curva che percorre la retta per $(-1,1)$ e $(2,0)$ nel verso delle x crescenti

2) curva che percorre la retta per $(2,1)$ e $(-1,-1)$ nel verso delle x decrescenti

3) curva che percorre il segmento da $(1,0)$ a $(4,4)$

4) curva che percorre il segmento da $(-1,-3)$ a $(-3,3)$.

5) curva che percorre la circonferenza di $C(-1,1)$ e $R=2$ in verso antiorario partendo da $(1,1)$ $\quad P_0=(\sqrt{3}-1,2)$

- stesso esercizio in verso antiorario partendo da $(-3,1)$
- = = = = orario " " $(1,1)$

6) curva che percorre la circonferenza di centro $(0,-3)$ e $R=3$ in verso antiorario partendo da $(0,0)$

- in verso antiorario: da $(3,-3)$ a $(-3,-3)$ $\quad$ da $(-3,-3)$ a $(3,-3)$

  da $(0,-6)$ a $(0,0)$ $\quad$ da $(0,-6)$ a $(-3,-3)$

7) curva che percorre l'ellisse di $C(0,0)$ e semiassi $(1,\frac{1}{3})$ in verso antiorario partendo da $(1,0)$

- in verso antiorario partendo da $(0,\frac{1}{3})$

8) curva che percorre l'ellisse di $C(2,1)$ e semiassi $(2,1)$ in verso antiorario partendo da $(4,1)$. $P_0=(2-\sqrt{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

- in verso antiorario partendo da $(2,0)$

9) percorre il grafico di $y=\operatorname{sen}x$ da $(0,0)$ a $(2\pi,0)$ $P_0=(\frac{5}{6}\pi,\frac{1}{2})$

- stesso esercizio da $(2\pi,0)$ a $(0,0)$

10) grafico di $y=e^{-x}$ da $(-2,e^2)$ a $(1,\frac{1}{e})$ $P_0=(-1,e)$

- da $(1,\frac{1}{e})$ a $(-2,e^2)$

11) grafico di $y=|x|$ per $x\in[-3,4]$

12) grafico di $y=|\cos x|$ da $(0,1)$ a $(2\pi,1)$ $P_0=(\frac{3}{4}\pi,\frac{\sqrt{2}}{2})$

13) percorre l'iperbole $xy=1$ da $(\frac{1}{2},2)$ a $(2,\frac{1}{2})$

- da $(-3,-\frac{1}{3})$ a $(-\frac{1}{3},-3)$

14) iperbole $x^2-y^2=1$ da $(2,-\sqrt{3})$ a $(2,\sqrt{3})$

- da $(-2,-\sqrt{3})$ a $(-2,\sqrt{3})$

15) iperbole $y^2-x^2=1$ da $(-\sqrt{3},2)$ a $(\sqrt{3},2)$

- da $(-\sqrt{3},-2)$ a $(\sqrt{3},-2)$.

Disegnate i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano parametrizzando ogni tratto del bordo dell'insieme. Scrivete anche le equazioni delle rette tangente e normale nei punti a fianco indicati.

1) triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,2)$, $(3,3)$.

2) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{x}\}$

3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\ge 1, 0\le y\le 1-\frac{x^2}{4}\}$ $P_0=(-1,\frac{3}{4})$

4) quadrato di vertici $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$.

5) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 4, |x|\le\sqrt{2}\}$

6) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1, e^x-1\le y\le -x+e\}$ $P_0=(\frac{1}{2},\sqrt{e}-1)$

7) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le 4\}$

8) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-1\le y\le -x+1\}$ $P_0=(-1,0)$

9) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

10) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 9-(x-1)^2\}$

11) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le x\le 2,\ -2\le y\le 2,\ xy\le 1\}$ $\quad P_0=(-1,-1)$

12) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2,\ y\ge 0,\ y^2-x^2\le 1\}$

13) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -2\le x\le 1,\ -x^3+x^2+x\le y\le 10\}$ $\quad P_0=(0,0)$

14) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-\pi)^2+y^2\le\pi^2,\ y\ge -\operatorname{sen}x\}$

15) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \arctan x\}$

16) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{e}\le x\le e,\ |\log x|\le y\le 1\}$

17) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+\frac{(y-1)^2}{(e-1)^2}\le 1,\ y\le e^x\}$

Disegnate approssimativamente il sostegno e calcolate la lunghezza delle seguenti curve:

1) LIBRO di ESERCIZI: 1.19, 1.20, 1.21, 1.23, 1.25, 1.26, 1.33, 1.34

2) $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x=t^2 \\ y=\frac{2\sqrt{2}}{3}t^3 \end{cases}$

Disegnate i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano calcolando poi la lunghezza del bordo dell'insieme.

1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le -\frac{1}{2}x^2+2,\ x^2+y^2\ge 1\}$

2) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{2}{3}x^{3/2}\le y\le \frac{2\sqrt{3}}{3}x\}$

3) $A=A_1\cup A_2$ $\quad A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x^2+y^2-2x-2y+1\le 0\}$

$A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le e^x\}$

(sostituzione consigliata: $\sqrt{1+e^{2t}}=s$)

PRIMITIVE (difficili da calcolare)

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\log(|x+\sqrt{1+x^2}|)+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C \qquad \left(\begin{array}{c}\text{SOSTITUZ.}\\ \sqrt{1+x^2}=s-x\end{array}\right)$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\log(|x+\sqrt{1+x^2}|)+c$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}-\log(|x+\sqrt{1+x^2}|))+c$$

ESERCIZI di RICAPITOLAZIONE sulle CURVE

1) Date la definizione di curva nel piano. Dite poi se le seguenti equazioni parametriche definiscono oppure no delle curve, motivando accuratamente le risposte

$\gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=e^{-t}+1 \end{cases} \quad t\in[0,2]\cup[3,4]$ $\qquad \gamma_2 \begin{cases} x=-1+\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,\frac{3}{2}\pi]$

$\gamma_3: [-\frac{\pi}{2},\pi]\to\mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x=2\cos t \\ y=1+2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \; t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \quad \begin{cases} x=t \\ y=t-\pi \end{cases} \; t\in]\frac{\pi}{2},\pi]$

2) Date la definizione di curva di classe C^1. Dite poi quali tra le seguenti curve sono di classe C^1 e quali no, motivando accuratamente la risposta e disegnando il sostegno delle curve date

$\gamma_1 \begin{cases} x=t \\ y=-2t+2 \end{cases} \quad t\in[-1,1]$ $\qquad \gamma_2 \begin{cases} x=t \\ y=-2|t|+2 \end{cases} \quad t\in[-1,1]$

$\gamma_3 \begin{cases} x=t \\ y=e^{-t} \end{cases} \quad t\in[-1,1]$ $\qquad \gamma_4 \begin{cases} x=t \\ y=e^{-|t|} \end{cases} \quad t\in[-1,1]$

$\gamma_5 \begin{cases} x=t \\ y=|3t-1| \end{cases} \quad t\in[-1,1]$ $\qquad \gamma_6 \begin{cases} x=t \\ y=|e^{t}| \end{cases} \quad t\in[-1,1]$

$\gamma_7 \begin{cases} x=t \\ y=|t^2+2| \end{cases} \quad t\in[-2,1]$ $\qquad \gamma_8 \begin{cases} x=|t^2-1| \\ y=t \end{cases}$

$\gamma_9 \begin{cases} x=t \\ y=|\mathrm{sen}\,t| \end{cases} \quad t\in[-2\pi,2\pi]$ $\qquad \gamma_{10} \begin{cases} x=t \\ y=t^2-2|t|+1 \end{cases} \quad t\in[-2,2]$

3) Scrivete le equazioni parametriche di due curve diverse aventi lo stesso sostegno (eseguite l'esercizio per almeno 3 differenti sostegni).

4) Date la definizione di curva chiusa. Dite poi quali tra le seguenti curve sono chiuse e quali non lo sono, motivando la risposta e disegnando il sostegno delle curve date:

$\gamma_1 \begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma_2 \begin{cases} x = -1 + \cos(2t) \\ y = 1 + \operatorname{sen}(2t) \end{cases} \quad t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$

$\gamma_3 \begin{cases} x = 3 + 2\cos(2t) \\ y = 1 + 3\operatorname{sen}(2t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

5) Sia γ la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = -\log t \end{cases}$ $t \in [1, e^2]$; dopo aver disegnato il sostegno di γ dite quale tra questi vettori è tangente alla curva in $(e, -1)$:

$$\left(1, \frac{1}{e}\right) \quad \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) \quad \left(-1, \frac{1}{e}\right) \quad \left(1, -\frac{1}{e}\right).$$

6) Sia γ una curva che percorre il grafico della funzione $y = x^2 + 1$ nel verso delle x crescenti per $x \in [0, 4]$. Dite quale tra i seguenti vettori è il VERSORE NORMALE a γ in $(1, 2)$:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

7) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la retta per i due punti $P_0 = (-1, -1)$ e $P_1 = (1, 3)$ nel verso delle x crescenti. Stesso esercizio nel verso delle x decrescenti.

8) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre il segmento da $P_0 = (1, 0)$ a $P_1 = (4, 2)$. Stesso esercizio da P_1 a P_0.

9) Dite chi sono il vettore velocità e la velocità scalare. Dite poi in quali tra le seguenti curve la velocità scalare è costante, motivando la risposta e disegnando

il sostegno delle curve date

$$\gamma_1 \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = -t^2+2t+2 \end{cases} \quad t\in[0,4]$$

$$\gamma_3 \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \qquad \gamma_4 \begin{cases} x = 2\cos(3t) \\ y = 1+2\,\mathrm{sen}(3t) \end{cases} \quad t\in[0,\tfrac{2}{3}\pi]$$

Calcolate inoltre $L(\gamma_4)$ sia con la formula che in maniera elementare, mostrando che si ottiene lo stesso risultato.

10) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la retta $y=x$ nel verso delle x crescenti con velocità scalare costante 1.

11) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza $x^2+y^2-2y-3=0$ per un giro in verso antiorario partendo da $(2,1)$. Stesso esercizio partendo da $(0,-1)$. Stesso esercizio con velocità 4. Stesso esercizio con velocità 1.

12) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la circonferenza di $C(1,0)$ e $R=2$ per un giro in verso orario partendo da $(3,0)$. Stesso esercizio partendo da $(1,-2)$. Stesso esercizio partendo da $(-1,0)$.

13) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'ellisse di equazione $4x^2+y^2-1=0$ per un giro in verso antiorario partendo da $(\frac{1}{2},0)$. Stesso esercizio per <u>due</u> giri partendo da $(-\frac{1}{2},0)$.

14) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'insieme di equazione $4x^2+y^2=4$ per un giro in verso orario partendo da $(1,0)$. Stesso esercizio per <u>due</u>

giri partendo da $(0,2)$.

15) Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre l'ellisse di equazione $\frac{(x+1)^2}{9}+(y-2)^2=1$ per un giro in verso antiorario partendo da $(2,2)$. Stesso esercizio partendo da $(-4,2)$.
Scrivete le equazioni parametriche di una curva che percorre la stessa ellisse in verso orario da $(-1,1)$ a $(-1,3)$.

16) Determinate l'equazione cartesiana della parabola di vertice $V=(-1,0)$ che passa per $(0,2)$.
Scrivete poi le equazioni parametriche di una curva che percorre il grafico della parabola nel verso delle x crescenti da $(-2,2)$ a $(0,2)$.

17) Determinate l'equazione cartesiana della parabola di vertice $(2,3)$ che passa per $(1,0)$. Scrivete poi le equazioni parametriche di una curva che percorre il grafico della parabola nel verso delle <u>x decrescenti</u> da $(2,3)$ a $(1,0)$.

18) Scrivete le equazioni parametriche di una curva chiusa di classe C^1 il cui sostegno contenga i due punti $(3,2)$ e $(2,3)$.

19) Determinate quale funzione esponenziale $y(x)=ce^{\alpha x}$ $c,\alpha\in\mathbb{R}$ passa per i punti $(0,2)$ e $(1,2e^2)$. Scrivete poi le equazioni parametriche di una curva che percorre il grafico di tale funzione nel verso delle x crescenti da $(0,2)$ a $(1,2e^2)$. Stesso esercizio nel verso delle x decrescenti. Disegnate il grafico della funzione trovata.

20) Scrivete la formula che permette di calcolare la lunghezza di una curva data mediante il calcolo di un integrale. Per quali curve è valida questa formula?
Come diventa la formula della lunghezza se la curva percorre il grafico della funzione $y=f(x)$ per $x\in[a,b]$?

21) Determinate per quale $k \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione $f(x) = |x| - k$ passa per $(-2,0)$. Dopo aver disegnato il grafico della funzione trovata, scrivete le equazioni parametriche della curva che percorre il grafico di tale funzione da $(4,2)$ a $(-1,-1)$ nel verso delle x decrescenti.

22) Si consideri la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = -1 + 3\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 6\pi].$$

Quanto tempo impiega il punto materiale a percorrere una distanza pari a 9π?

23) Sia $\gamma: [-\pi, 6] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -2 + 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} t \in [-\pi, 0] \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} t \in]0, 3[\quad \begin{cases} x = t - 3 \\ y = e^{3-t} + 2 \end{cases} t \in [3, 6].$$

a) Disegnate il sostegno di γ, specificando il verso di percorrenza e l'equazione (cartesiana o implicita) di ogni tratto.

b) Scrivete sia l'equazione parametrica sia l'equazione cartesiana della retta tangente a γ nel punto corrispondente a $t = 4$.

c) Scrivete sia l'equazione parametrica sia l'equazione cartesiana della retta tangente a γ in $P_0 = (-2 + \sqrt{3}, -1)$.

24) Svolgete tutti gli esercizi dei compitini e dei compiti degli a.a. 2003-04, 2004-05.

25) Disegnate i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano e poi scrivete una parametrizzazione di ogni tratto del bordo dell'insieme.

(i) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0,\ y \ge -x\}$

(ii) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0,\ xy \ge -\frac{1}{2}\}$

(iii) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-3)^2+(y-3)^2\le 8,\ y\le x\}$

(iv) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

(v) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\ge 1,\ 0\le y\le 1-\frac{x^2}{4}\}$

(vi) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ y\ge x^{3/2},\ x^2+y^2-2\le 0\}$

(vii) $E=E_1\cup E_2$ $\quad E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ -2\le y\le -2x^{3/2}\}$

$E_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\le 0\}$

(viii) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\le 4,\ y\le -x+2,\ y\le x-2\}$

(ix) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4x\le 0,\ x-2\le y\le -x+2\}$

(x) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e^x\le y\le e,\ y\ge e^{-x}\}$

(xi) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le e,\ y\le \log x,\ x^2-2ex+y^2+2e-1\le 0\}$

(xii) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ ||x|-3|\le y\le 2\}$

Calcolate anche la lunghezza L(bordo di E) per gli esercizi (i), (iii), (vi), (vii), (viii), (ix), (xii).

Qualora la lunghezza si possa calcolare interamente in maniera elementare, sceglierete un tratto del bordo di E per il quale calcolerete comunque la lunghezza utilizzando la formula.